亚诺教育左老师数学每日一题 2021.4.2

高二年级

题：已知$\left(\frac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt[3]{a}\right)^n$的展开式的各项系数之和等于$\left(4\sqrt[3]{b}-\frac{1}{\sqrt{5b}}\right)^5$展开式中的常数项，求$\left(\frac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt[3]{a}\right)^n$展开式中含$a^{-1}$的项的二项式系数.

【答案】35

【分析】

先研究$(4\sqrt[3]{b}-\frac{1}{\sqrt{5b}})^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r(4\sqrt[3]{b})^{5-r}(-\frac{1}{\sqrt{5b}})^r=(-\frac{1}{\sqrt{5}})^r\bullet 4^{5-r}C_5^r\bullet b^{\frac{10-5r}{6}},(r=0,1,2,3,4,5)$．求出$(\frac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt[3]{a})^n$的展开式的各项系数之和，解方程求出$n$，再由二项展开式的通项公式求得$a^{-1}$的项是第4项

【详解】

设$\left(4\sqrt[3]{b}-\frac{1}{\sqrt{5b}}\right)^5$的展开式中的通项为$T_{r+1}=C_5^r(4\sqrt[3]{b})^{5-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{5b}}\right)^r=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^r\cdot 4^{5-r}C_5^r\cdot b^{\frac{10-5r}{6}},(r=0,1,2,3,4,5)$.

若求常数项，则令$\frac{10-5r}{6}=0,\quad \therefore r=2$，代入上式$\therefore T_3=2^7$.

即常数项是2^7，

又$(\frac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt[3]{a})^n$的展开式的各项系数之和为$2^n=2^7$，

$\therefore n=7$，

而$\left(\frac{3}{\sqrt{a}}-\sqrt[3]{a}\right)^7$的通项公式$T_{r+1}=C_7^r(\frac{3}{\sqrt{a}})^{7-r}\left(-\sqrt[3]{a}\right)^r=C_7^r3^{7-r}\left(-1\right)^r a^{-\frac{7}{2}+\frac{5}{6}r}$，

令$-\frac{7}{2}+\frac{5}{6}r=-1$，解得$r=3$，

即二项式系数是$C_7^3=35$