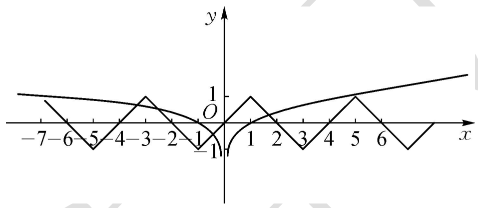
亚诺教育Z老师数学每日一题2021.4.27

高三年级17（星期二）

题：定义在R上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$，且在区间[2，4)上 $f(x)=\begin{cases}2-x,2\le x<3\\x-4,3\le x<4\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)-\log_5|x|$ 的零点的个数为________

【答案】：5

【解析】：因为 f(x + 4) = f(x)，可得 f(x)是周期为 4 的奇函数，先画出函数 f(x)在区间[2，4)上的图像，根据奇函数和周期为 4，可以画出 f(x)在 R 上的图像，由 $y=f(x)-\log_5|x|=0$，得 $f(x)=\log_5|x|$，分别画出 $y=f(x)$ 和 $y=\log_5|x|$ 的图像，如下图，由 $f(5)=f(1)=1$，而 $\log_5 5=1$，$f(-3)=f(1)=1$，$\log_5|-3|<1$，而 $f(-7)=f(1)=1$，而 $\log_5|-7|=\log_5 7>1$，可以得到两个图像有 5 个交点，所以零点的个数为 5.



变式 1、已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论 f(x)的单调性，并证明 f(x)有且仅有两个零点；

【解析】（1）f（x）的定义域为（0，1）∪（1，+∞）.

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$ 在（0，1），（1，+∞）单调递增.

因为 f（e）$=1-\dfrac{e+1}{e-1}<0$，$f(e^2)=2-\dfrac{e^2+1}{e^2-1}=\dfrac{e^2-3}{e^2-1}>0$，所以 f（x）在（1，+∞）有唯一零点 x_1，即 f（x_1）=0. 又 $0<\dfrac{1}{x_1}<1$，$f(\dfrac{1}{x_1})=-\ln x_1+\dfrac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，故 f（x）在（0，1）有唯一零点 $\dfrac{1}{x_1}$.

综上，f（x）有且仅有两个零点.

变式 2、已知 $1<a\le 2$，函数 $f\left(x\right)=e^x-x-a$，其中 e=2.71828…是自然对数的底数. （I）

证明：函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点；

【解析】(I) 因为 $f(0)=1-a<0$， $f(2)=\mathrm{e}^{2}-2-a\geq\mathrm{e}^{2}-4>0$，所以 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在零点.

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，所以当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数以 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.